3. ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВОЛІ

Для дослідження руху механічної системи з одним ступенем волі застосовують, звичайно, теорему про зміну кінетичної енергії системи, загальне рівняння динаміки, а також рівняння Лагранжа другого роду.

Теорему про зміну кінетичної енергії системи в інтегральній формі зручно застосовувати для розв'язання задач, коли в число заданих і шуканих величин входять швидкості і переміщення точок механічної системи. Якщо потрібно скласти диференціальне рівняння руху механічної системи (чи визначити прискорення точок системи), то звичайно застосовують загальне рівняння динаміки або рівняння Лагранжа другого роду.

3.1. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

В інтегральній формі теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи має вигляд:

$$T_1 - T_0 = \sum_k A_k^e + \sum_k A_k^i \, , \tag{3.1}$$

де T_1, T_0 - кінетична енергія системи відповідно в кінцевому і початковому положеннях; $\sum_k A_k^e, \sum_k A_k^i$ - суми робіт відповідно зовнішніх і внутрішніх сил системи при переміщенні з початкового положення в кінцеве.

Для незмінних систем (наприклад, системи твердих тіл, зв'язаних гнучкими нерозтяжними нитками)

$$\sum_k A_k^i = 0 \tag{3.2}$$

і теорема приймає вид:

$$T_1 - T_0 = \sum_k A_k^e \, . \tag{3.3}$$

Кінетичною енергією системи називається скалярна величина, яка дорівнює сумі кінетичних енергій усіх точок механічної системи:

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k V_k^2 . \qquad (3.4)$$

Кінетична енергія твердого тіла визначається за формулами:

а) при поступальному русі:

$$T = \frac{1}{2} M V_{\tilde{n}}^2 , \qquad (3.5)$$

де M - маса твердого тіла; V_c - швидкість центра мас тіла;

б) при обертальному русі тіла навколо нерухомої осі Oz :

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 , \qquad (3.6)$$

де J_z - момент інерції тіла навколо осі обертання Oz; ω - кутова швидкість тіла;

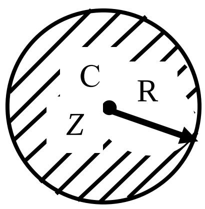
в) при плоскопаралельному русі:

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \omega^2 , \qquad (3.7)$$

де M - маса твердого тіла; V_c - швидкість центра мас тіла; $J_{\tilde{n}z}$ - момент інерції твердого тіла щодо осі Cz, що проходить через центр мас С перпендикулярно до площини руху; ω - кутова швидкість тіла.

Моменти інерції деяких однорідних твердих тіл щодо осі z, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас тіла:

а) суцільний круглий диск, циліндр:

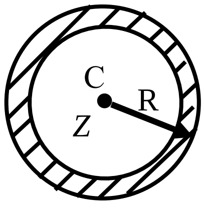


$$J_{cz} = \frac{MR^2}{2} , \qquad (3.8)$$

де M, R - маса і радіус диска (циліндра);

Рис. 3.1

б) кільце (маса тіла розподілена по його ободу):



$$J_{cz} = MR^2 ; \qquad (3.9)$$

Рис. 3.2

в) якщо заданий радіус інерції i_z твердого тіла, то його момент інерції:

$$J_{cz} = Mi_z^2. \tag{3.10}$$

Робота постійної сили на прямолінійному переміщенні визначається по формулах (1.18) або (1.19).

Робота сили, прикладеної до тіла, що обертається, визначається по формулі

$$A_F = \int_0^{\varphi} M_z(\overline{F})\, d\varphi,$$

де $M_z(\overline{F}) = RF$ - момент сили щодо осі обертання;

φ - кінцеве значення кута повороту тіла.

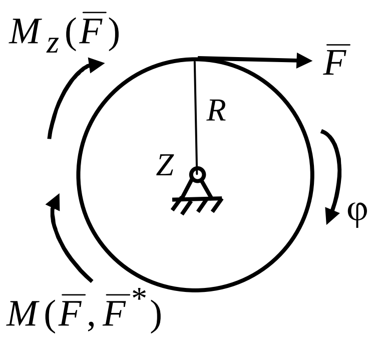


Рис. 3.3

Якщо момент сил $M_z(\overline{F}) = const$, то формула приймає вид

$$A_F = \pm M_z(\overline{F}) \cdot \varphi. \tag{3.11}$$

У формулі (3.11) береться знак «+», якщо сила прагне повернути тіло в сторону зростання кута повороту (рис. 3.3), і знак «-», якщо навпаки.

Для роботи моменту $M(\overline{F}, \overline{F}^*)$ пари сил (рис.3.3) отримаємо, враховуючи (3.11),

$$A_{M} = \pm M(\overline{F}, \overline{F}^*) \cdot \varphi \tag{3.12}$$

де знак «+» використовують якщо напрямки моменту і кута повороту тіла співпадають.

3.2. Загальне рівняння динаміки

Для механічних систем з ідеальними, стаціонарними, голономними й утримуючими в'язями загальне рівняння динаміки має вигляд:

$$\sum_k \delta A_k^a + \sum_k \delta A_k^{ін} = 0, \qquad (3.13)$$

де $\sum_k \delta A_k^a$ і $\sum_k \delta A_k^{ін}$ - суми робіт відповідно активних сил та сил інерції на можливих переміщеннях точок прикладання цих сил.

При русі твердого тіла сили інерції приводяться:

а) при поступальному русі - до сили $\overline{F}^{ін} = -M\overline{a}_c$, яка дорівнює

$$F^{ін} = M \cdot a_c, \qquad (3.14)$$

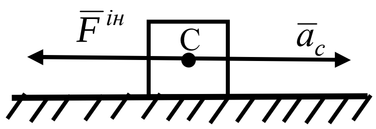


Рис. 3.4

де M - маса твердого тіла;

a_c - прискорення центра мас тіла;

б) при обертальному русі навколо нерухомої осі Cz, що проходить через центр мас тіла - до пари сил інерції, момент $M^{ін}$, якої дорівнює

$$M^{ін} = J_{cz}\varepsilon, \qquad (3.15)$$

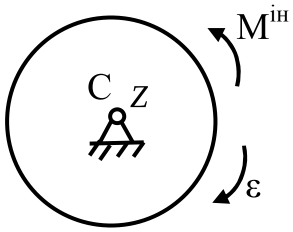


Рис. 3.5

де J_{cz} - момент інерції твердого тіла навколо осі обертання;

ε - кутове прискорення тіла.

Момент пари сил інерції завжди спрямован убік, протилежний напрямку кутового прискорення ε;

в) при плоскопаралельному русі - до сили інерції $\overline{F}^{ін} = -M\overline{a}_c$ і пари сил інерції $M^{ін}$.

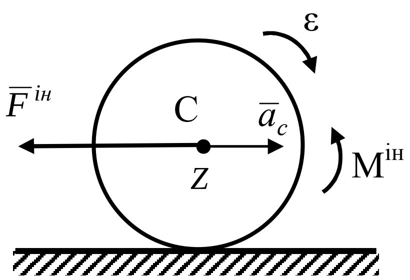


Рис. 3.6

Пара сил інерції $M^{ін}$ дорівнює за модулем

$$M^{ін} = J_{cz}\varepsilon, \qquad (3.16)$$

де J_{cz} - момент інерції твердого тіла навколо осі Cz, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас С тіла;

ε - кутове прискорення тіла.

Момент пари сил інерції спрямован убік, протилежний напрямку кутового прискорення ε.

3.3. Рівняння Лагранжа другого роду

Для механічної системи з одним ступенем волі, яка підпорядкована ідеальним, стаціонарним, голономним і утримуючим в'язям, рівняння Лагранжа другого роду має вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q, \qquad (3.17)$$

де q - узагальнена координата;

$\dot{q}$ - узагальнена швидкість;

T - кінетична енергія механічної системи, виражена через узагальнені координату і швидкість;

Q - узагальнена сила.

Для обчислення узагальненої сили Q потрібно надати механічній системі можливе переміщення δq, обчислити суму робіт активних сил на можливих переміщеннях точок прикладання цих сил, виразити всі можливі переміщення точок прикладання сил через узагальнене можливе переміщення δq і привести вираження для суми робіт активних сил до вигляду

$$\sum_k \delta A_k^a = Q\cdot\delta q \qquad (3.18)$$

Узагальнена сила Q дорівнює коефіцієнту при δq у виразі (3.18).

3.4. Приклади розв’язання задач

3.4.1. Дослідження руху механічної системи за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії в інтегральній формі

Методику розв’язання задач розглянемо на наступному прикладі.

ПРИКЛАД 3.1 На похилій площині, яка розташована під кутом $\alpha = 60^0$ до обрію, лежить вантаж 1 масою $M_1 = 4m$, який прикріплений

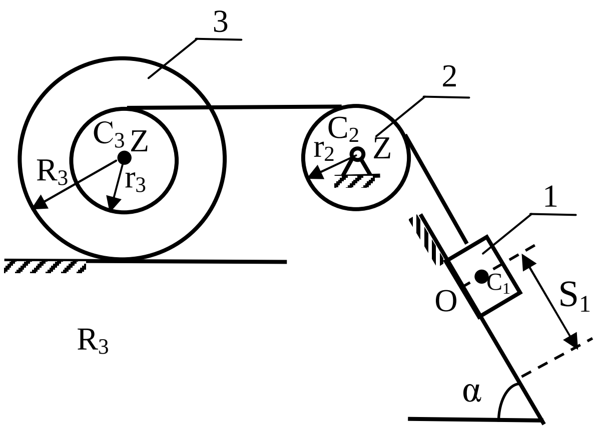


Рис. 3.7

до кінця ідеальної нерозтяжної нитки (рис.3.7). Нитка перекинута через блок 2 масою $M_2 = 1{,}5m$ і навернена на барабан котушки 3 радіуса $r_3 = r$. При русі вантажу по похилій площині вниз котушка 3 масою $M_3 = 20m$ і радіуса $R_3 = 3r$ котиться без ковзання по горизонтальній площині управо. Радіус інерції котушки щодо осі, яка проходить через її центр мас С, дорівнює $i_{3z} = 4r$. Блок 2 вважати суцільним циліндром. Масою нитки зневажити. Коефіцієнт тертя ковзання вантажу 1 об похилу площину f = 0,2. Коефіцієнт тертя кочення котушки 3 об горизонтальну площину $\delta_к$ = 0,4 см. У початковий момент система знаходилася в стані спокою. Радіус $r = 2$ см. Визначити швидкість вантажу 1 у момент часу, коли він переміститься на відстань 1 м.

Розв'язання:

Для розрахунку швидкості вантажу застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі (3.1).

Методика розв'язання задачі наступна.

1) Проаналізуємо механічну систему, яка складається з вантажу 1, блоку 2 і котушки 3, зв'язаних ідеальною нерозтяжною ниткою. Механічна система, що розглядається, є незмінною і для неї справедлива рівність (3.2). Положення вантажу 1 на похилій площині визначимо віссю O_{x1} (рис.3.8)

2) Визначимо і покажемо на схемі (рис.3.8) лінійні і кутові швидкості тіл механічної системи з урахуванням видів їх руху.

Вантаж 1 рухається по похилій площині вниз поступально, тому швидкість $\overline{V_1}$ його центра мас C_1 спрямуємо донизу в напрямку осі Ox_1.

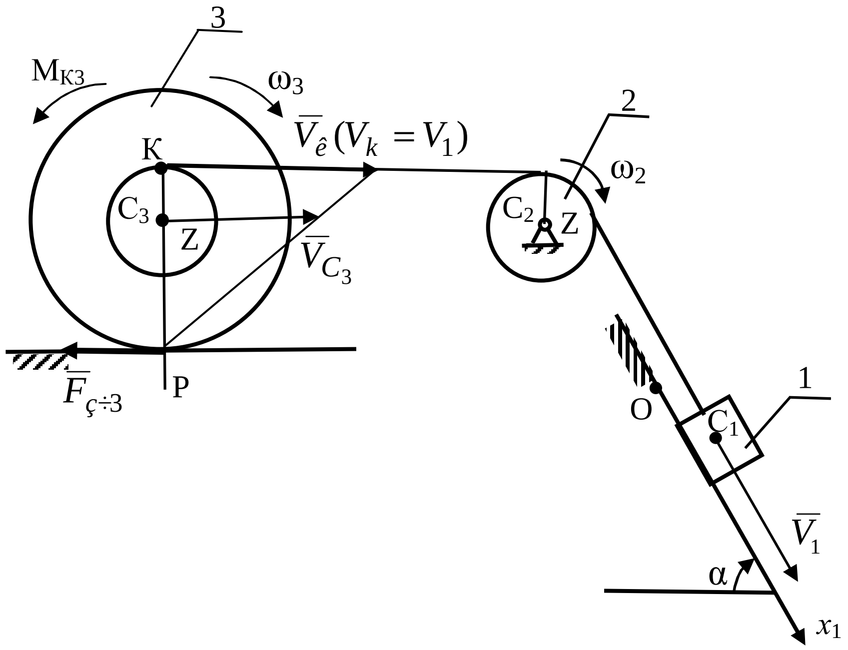


Рис. 3.8

Блок 2 виконує обертальний рух навколо осі C_2z. В зоні взаємодії нитки і блоку відсутнє проковзування, тому лінійна швидкість нитки на ободі 2 дорівнює швидкості вантажу 1, а кутова швидкість ω_2 визначається за формулою

$$\omega_2 = V_1 / r_2. \tag{3.19}$$

Дугову стрілку ω_2 направимо за ходом стрілки годинника. Котушка 3 здійснює плоско-паралельний рух. При коченні без ковзання миттєвий центр швидкостей (МЦШ) розташований у точці P торкання котушки з горизонтальною площиною. Кутову швидкість ω_3 котушки і лінійну швидкість V_{C_3} її центра мас C_3 визначимо методом МЦШ:

$$\omega_3 = V_к / KP = V_1 / (R_3 + r_3) = V_1 / (3r + r) = V_1 / 4r, \tag{3.20}$$

$$V_{C_3} = \omega_3 \cdot CP = \omega_3 \cdot R_3 = 3V_1 / 4, \tag{3.21}$$

де враховано, що за величиною лінійна швидкість $\overline{V}_{\hat{e}}$ точки К дорівнює швидкості $\overline{V}_1$ вантажу 1. За напрямком вектор швидкості $\overline{V}_{\hat{e}}$ спрямуємо управо, а дугову стрілку ω_3 – за ходом стрілки годинника.

3) Обчислимо кінетичну енергію механічної системи в початковому і кінцевому положеннях. При цьому усі лінійні і кутові швидкості, що

входять у вирази для кінетичних енергій тіл системи, виразимо через лінійну швидкість $\overline{V_1}$ вантажу 1, відповідно до умов задачі (рис.3.8). Цю швидкість назвемо далі базовою швидкістю системи.

Так як у початковий момент система знаходилася в стані спокою, то $T_0 = 0$.

Кінетична енергія системи в кінцевому положенні дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що входять у систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (3.22)$$

Вантаж 1 рухається поступально, тому його кінетична енергія визначається за формулою (3.5):

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 V_1^2. \qquad (3.23)$$

Блок 2 здійснює обертальний рух. Тоді, згідно (3.6), його кінетична енергія дорівнює

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{z2} \omega_2^2. \qquad (3.24)$$

Перетворимо далі формулу (3.24) з урахуванням моменту інерції і виразимо кутову швидкість блоку через базову швидкість $\overline{V_1}$ вантажу 1.

Так як блок 2 являє собою суцільний циліндр, то його момент інерції обчислимо по формулі (3.8):

$$J_{z2} = \frac{1}{2} M_2 r_2^2. \qquad (3.25)$$

Якщо підставити (3.25) у (3.24), одержимо:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{z2} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M_2 r_2^2 \cdot \frac{V_1^2}{r_2^2} = \frac{1}{4} M_2 V_1^2. \qquad (3.26)$$

Котушка 3 здійснює плоскопаралельний рух і її кінетична енергія, згідно (3.7), дорівнює

$$T_3 = \frac{1}{2} M_3 V_{c_3}^2 + \frac{1}{2} J_{c_3 z} \omega_3^2. \qquad (3.27)$$

За умовою задачі відомий радіус інерції i_{3z}, тому момент інерції котушки визначаємо по формулі (3.10):

$$J_{c_3 z} = M_3 i_{3z}^2 = M_3 \cdot 16 \cdot r^2. \qquad (3.28)$$

Підставляючи (3.28) у (3.27), одержимо:

$$T_3 = \frac{1}{2} M_3 V_c^2 + \frac{1}{2} J_{zc} \omega_3^2 = \frac{1}{2} M_3 \cdot \frac{9}{16} V_1^2 + $$
$$+ \frac{1}{2} M_3 \cdot 16 \cdot r^2 \cdot \frac{V_1^2}{16 r^2} = \frac{9}{32} M_3 V_1^2 + \frac{1}{2} M_3 V_1^2 = \frac{25}{32} M_3 V_1^2. \quad (3.29)$$

Обчислимо кінетичну енергію системи в кінцевому положенні. Згідно (3.22)

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{V_1^2}{32}\left(16M_1 + 8M_2 + 25M_3\right) =$$
$$= \frac{V_1^2}{32}\left(16 \cdot 4m + 8 \cdot 1{,}5m + 25 \cdot 20m\right) = \quad (3.30)$$
$$= \frac{V_1^2}{32}\left(64m + 12m + 500m\right) = \frac{576}{32} m V_1^2 = 18 m V_1^2.$$

4) Покажемо зовнішні сили, прикладені до системи (рис. 3.9): $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ - сили ваги тіл 1, 2 і 3; $\overline{N}_1, \overline{N}_3$ - нормальні реакції опорних площин тіл, $\overline{N}_2$ - реакцію осі блоку 2; $\overline{F}_{TĐ_1}$ - силу тертя ковзання вантажу 1 об похилу площину; $\overline{F}_{TP_3}$ - сила тертя котушки 3 із опорною площиною; $M_{\hat{e}_3}$ - пара сил тертя кочення котушки 3 ($M_{к3} = \delta_к \cdot M_3$). Силу ваги $\overline{P}_1$ представимо у вигляді двох координатних складових: $\overline{P}_1 = \overline{P}_{11} + \overline{P}_{12}$. За величинами

$P_{11} = P_1 \cdot sin\,\alpha$; $P_{12} = P_1 \cdot cos\,\alpha$; $N_1 = P_{12} = P_1 \cdot cos\,\alpha$; $N_2 = P_2$; $N_3 = P_3$ і

$$F_{TP_1} = fN_1 = fP_1 \, cos\,\alpha = fM_1 g \, cos\,\alpha$$

5) Визначимо і покажемо на схемі (рис.3.9) елементарні і кінцеві лінійні переміщення точок прикладання зовнішніх сил системи, а також кутові переміщення котушки 3:

- елементарне і кінцеве переміщення точок прикладання сил $\overline{P}_1, \overline{P}_{11}, \overline{P}_{12}, \overline{N}_1, \overline{F}_{TP_1}$ вантажу 1: $d\overline{x}_1$ (вантаж 1 рухається поступально, всі його точки мають однакові переміщення); $S_1 = \int_0^{s_1} dx_1$ (задане умовою задачі);

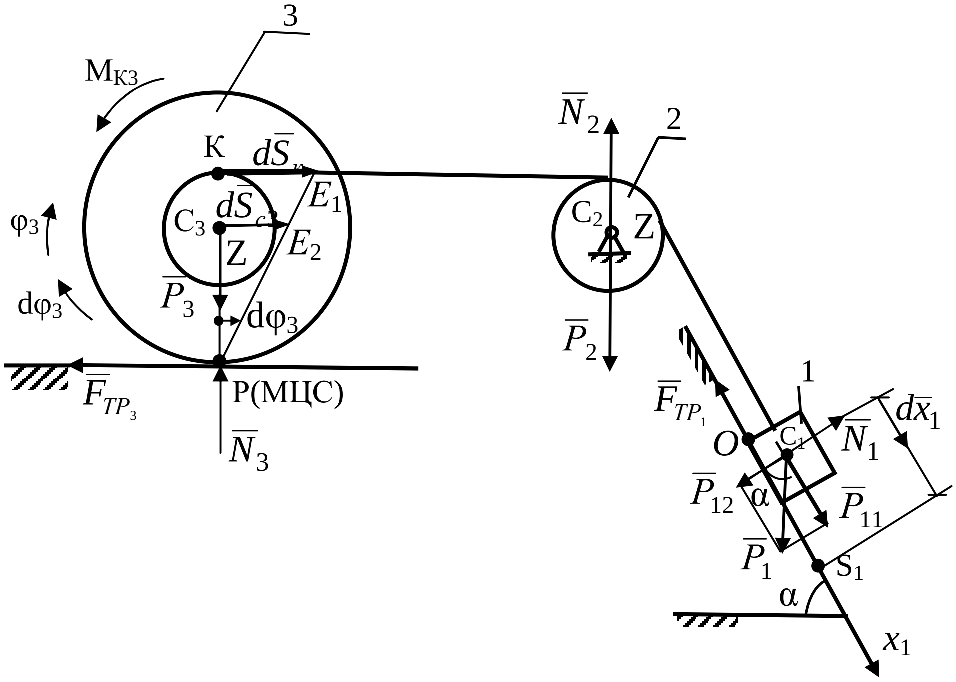


Рис.3. 9

- елементарне переміщення точки прикладання сил $\overline{P}_2$ і $\overline{N}_2$ блоку 2 дорівнює нулю $d\overline{r}_{c2} = 0$, тому що опора і вісь C_2z обертання блоку нерухомі;
- елементарне переміщення точки прикладання сил $\overline{N}_3$ і $\overline{F}_{TP_3}$ дорівнює нулю $d\overline{r}_д = 0$, так як точка P – миттєвий центр швидкостей котушки;
- елементарне лінійне переміщення точки прикладання сил ваги $\overline{P}_3$ котушки: $dS_{C_3} = 3dS_к / 4 = 3dx_1 / 4$ (з подібності трикутників PKE_1 і PC_3E_2);
- елементарне і кінцеве кутові переміщення котушки: $d\varphi_3 = dS_к / KP = dx_1 / KP = dx_1 / 4r$ ($dS_к = dx_1$ так як нитка ідеальна і нерозтяжна; враховано також, що для нескінченно малих елементарних переміщень виконується $tg(d\varphi_3) = d\varphi_3$;

$$\varphi_3 = \int_0^{\varphi_3} d\varphi_3 = \int_0^{s_1} \frac{dx_1}{4r} = S_1 / 4r .$$

6) Обчислимо суму робіт зовнішніх сил і моментів пар сил при переміщенні системи в кінцеве положення, скориставшись формулами (1.18), (3.11), (3.12). При цьому всі лінійні переміщення і кути повороту потрібно виразити через те лінійне переміщення (чи кут повороту), що входить в умову задачі (у число заданих чи шуканих величин):

$$\sum_{\kappa} A_k^e = A_{P_1} + A_{N_1} + A_{F_{TP_1}} + A_{P_2} + A_{N_2} + A_{P_3} + A_{N_3} + A_{F_{TP_3}} + A_{M_{\kappa 3}}, \quad (3.31)$$

де $A_{P_1} = A_{P_{11}} + A_{P_{12}}$; $A_{P_{11}} = P_{11} \cdot S_1 = P_1 \cdot sin\,\alpha \cdot S_1 = M_1 g S_1 \, sin\,\alpha$;
$A_{F_{TP_1}} = -F_{TP_1} \cdot S_1 = -fM_1 g S_1 \, cos\,\alpha$; $A_{M_{K3}} = -M_{K_3}\varphi_з = -\delta_\kappa \cdot M_з g S_1 / 4r$.

Елементарні роботи $d'A_{P_{12}} = \overline{P}_{12} \cdot d\overline{x}_1 = P_{12} \cdot dx_1 \cdot cos\,90^0 = P_{12} \cdot dx_1 \cdot 0 = 0$,

$d'A_{N_1} = \overline{N}_1 \cdot d\overline{x}_1 = N_1 \cdot dx_1 \cdot \cos 90^0 = N_1 \cdot dx_1 \cdot 0 = 0$ (елементарне переміщення $d\overline{x}_1 \perp$ силам $\overline{P}_{12}$ і $\overline{N}_1$), тому $A_{P_{12}} = 0$, та $A_{N_1} = 0$.

Елементарна робота $d'A_{p_3} = \overline{P}_3 \cdot d\overline{x}_1 = P_{12} \cdot d\overline{S}_{cз} \cdot cos\,90^0 = P_3 \cdot dS_{cз} \cdot 0 = 0$ (елементарне переміщення $d\overline{S}_{cз} \perp$ силі $\overline{P}_3$), в результаті $A_{p_3} = 0$.

Елементарні роботи $d'A_{p_2} = \overline{P}_2 \cdot d\overline{r}_{c_2} = \overline{P}_2 \cdot 0 = 0$ і
$d'A_{N_2} = \overline{N}_2 \cdot d\overline{r}_{c2} = \overline{N}_2 \cdot 0 = 0$, відповідно $A_{p_2} = 0$, та $A_{N_2} = 0$.
Елементарні роботи $d'A_{N_3} = \overline{N}_3 \cdot d\overline{r}_p = \overline{N}_3 \cdot 0 = 0$,
$d'A_{F_{TP_3}} = \overline{F}_{TP_3} \cdot d\overline{r}_p = \overline{F}_{TP_3} \cdot 0 = 0$, тому $A_{N_3} = 0$ та $A_{F_{TP_3}} = 0$

Згідно (3.31),

$$\begin{aligned}
\sum A_k^e &= M_1 g S_1 \, sin\,\alpha - fM_1 g S_1 \, cos\,\alpha - \delta_\kappa \cdot M_3 g \frac{S_1}{4r} = \\
&= gS_1\left[M_1(sin\,\alpha - f\,cos\,\alpha) - \frac{M_3\delta_\kappa}{4r}\right] = \\
&= gS_1\left[4m(sin\,\alpha - f\,cos\,\alpha) - \frac{20m\delta_\kappa}{4r}\right] = \\
&= mgS_1\left[4(sin\,\alpha - f\,cos\,\alpha) - 5\frac{\delta_\kappa}{r}\right] = \\
&= m \cdot 10 \cdot 1 \cdot \left[4 \cdot (0{,}87 - 0{,}2 \cdot 0{,}5) - 5 \cdot \frac{0{,}4}{2}\right] = 20{,}8m.
\end{aligned} \quad (3.32)$$

7) Складемо формулу (3.3) теореми про зміну кінетичної енергії системи:

$$18mV_1^2 - 0 = 20{,}8m\,, \tag{3.33}$$

звідки отримаємо шукану швидкість вантажу

$$V_1 = \sqrt{\frac{20{,}8m}{18m}} \approx 1{,}08 \text{ (м/с).}$$

ВІДПОВІДЬ: Швидкість вантажу 1 у момент, коли він переміститься на відстань S_1 = 1м дорівнює $V_1 = 1{,}08$ м/с.

3.4.2. Дослідження руху механічної системи за допомогою загального рівняння динаміки

В даному випадку методику розв’язання задач розглянемо на наступному прикладі.

ПРИКЛАД 3.2. Умова задачі та задана схема механічної системи співпадають з прикладом 3.1. Але шуканою величиною у даному прикладі є прискорення вантажу 1.

Розв’язання

Для визначення прискорення вантажу 1 застосуємо загальне рівняння динаміки (3.13).

Методика розв’язання задачі складається з наступних етапів.

1). Розглянемо механічну систему, яка складається з вантажу 1, блоку 2 і котушки 3, зв'язаних ідеальною нерозтяжною ниткою (рис.3.7).

2). Покажемо активні сили, прикладені до системи: $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ - сили ваги тіл 1, 2 і 3; $\overline{N}_1$ – нормальна опорна реакція. Силу тертя ковзання $\overline{F}_{Tp1}$ вантажу 1 і пару сил опору коченню котушки 3 площиною $M_{кз}$ включимо теж до активних сил. Реакції ідеальних в'язей (силу натягу нитки, силу тертя ковзання котушки 3 по опорній поверхні, реакції нерухомої осі блоку 2, а також опорної поверхні котушки 3) на схемі не показуємо.

3). Визначимо і покажемо на схемі (рис.3.10) лінійні і кутові прискорення тіл системи. Виразимо всі прискорення тіл через базове прискорення a_1 вантажу 1.

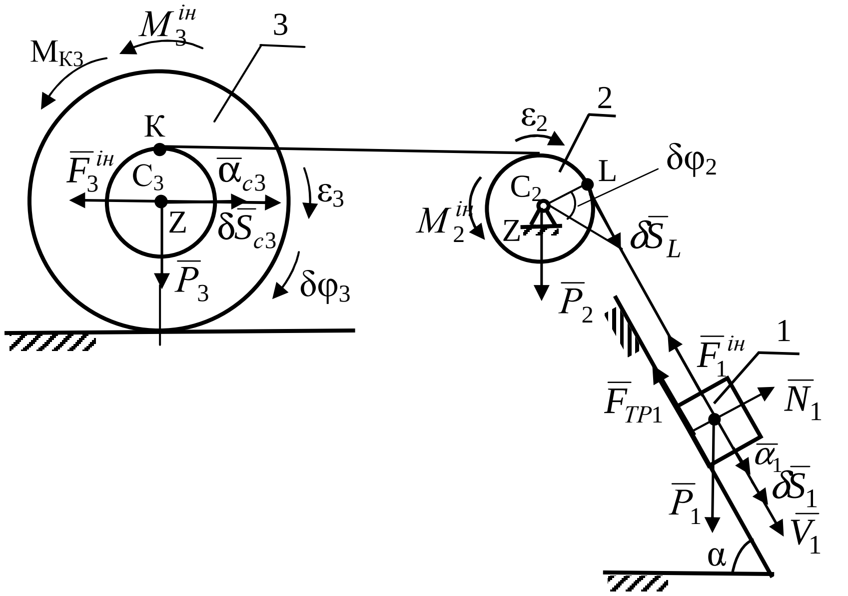


Рис. 3.10

Диференціюючи за часом обидві частини залежностей (3.19), (3.20), (3.21) і з огляду на те, що $\frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$; $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$; $\frac{dV_{c_3}}{dt} = a_{c_3}$; $\frac{dV_1}{dt} = a_1$, одержимо:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}, \tag{3.34}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{4r}, \tag{3.35}$$

$$a_{c_3} = \frac{3}{4} a_1. \tag{3.36}$$

Спрямуємо базове прискорення $\overline{a}_1$ вантажу 1 у бік його руху, тобто донизу. Тому, враховуючи вирази (3.34), (3.35), (3.36), дугові стрілки прискорень ε_2 і ε_3 покажемо за ходом стрілки годинника.

4). Приєднаємо до активних сил сили інерції тіл системи:

- силу інерції вантажу 1 (3.14):

$$F_1^{ін} = M_1 a_1, \tag{3.37}$$

враховуючи, що вантаж 1 здійснює поступальний рух;

- момент сили інерції блоку 2 (3.15):

$$M_2^{ін} = J_{C_{2z}} \varepsilon_2, \tag{3.38}$$

тому що блок 2 здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі C_2z;

- силу інерції і момент сил котушки 3 (3.16), (3.17):

$$F_3^{ін} = M_3 a_{C_3}, \tag{3.39}$$

$$M_3^{ін} = J_{C_{3z}} \varepsilon_3, \tag{3.40}$$

враховуючи, що котушка здійснює плоскопаралельний рух.

Сили інерції $\overline{F}_1^{ін}$ і $\overline{F}_3^{ін}$ вантажу 1 і котушки 3 спрямуємо у бік, протилежний їх власним прискоренням $\overline{a}_1$ і $\overline{a}_{c_3}$. Дугові стрілки моментів $M_2^{ін}$ і $M_3^{ін}$ сил інерції блоку 2 і котушки 3 покажемо проти ходу стрілки годинника, тобто у напрямках, протилежних стрілкам кутових прискорень ε_2 і ε_3.

5). Визначимо і покажемо на схемі можливі лінійні та кутові переміщення тіл системи. У якості базового застосуємо лінійні переміщення $\delta\overline{S}_1$ вантажу 1. Спрямуємо вектор $\delta\overline{S}_1$ у бік вектора швидкості $\overline{V}_1$ вантажу 1. В цьому випадку, враховуючи властивості можливих та дійсних переміщень, а також рівності $\delta\overline{S}_L = \delta\overline{S}_1$, $tg(\delta\varphi_2) = \delta\varphi_2$, отримаємо

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta S_L}{r_2}, \tag{3.41}$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{4r}, \tag{3.42}$$

$$\delta S_{C_3} = \frac{3}{4}\delta S_1. \tag{3.43}$$

6). Надамо системі можливе переміщення і складемо загальне рівняння динаміки (3.13):

$$P_1\delta S_1 \sin\alpha - F_{Tp1}\delta S_1 - M_{\kappa_3}\delta\varphi_3 - F_1^{ін}\delta S_1 -$$
$$- M_2^{ін}\delta\varphi_2 - F_3^{ін}\delta S_{C_3} - M_3^{ін}\delta\varphi_3 = 0. \quad (3.44)$$

В рівнянні (3.44) враховано, що можлива робота $\delta A_{P_2} = 0$, тому що її точка прикладання нерухома, а можливі роботи $\delta A_{N_1} = 0$ і $\delta A_{P_3} = 0$, тому що $\overline{N}_1 \perp \delta\overline{S}_1$, а $\overline{P}_3 \perp \delta\overline{S}_{C_3}$ відповідно.

Підставивши вирази для сил ваги $P_1 = M_1 g$, $P_3 = M_3 g$, сили тертя

$$F_{TP_1} = fN_1 = fP_1 \cos\alpha = -fM_1 g \cos\alpha,$$

моменту пари сил опору коченню

$$M_{\kappa 3} = \delta_\kappa N_3 = \delta_\kappa P_3 = \delta_\kappa M_3 g,$$

сил інерції (3.37) - (3.40), моментів інерції (3.25), (3.28), а також співвідношення між прискореннями (3.34) - (3.36) і можливими переміщеннями (3.41) - (3.43) у загальне рівняння динаміки (3.44), одержимо

$$M_1 g\delta S_1 \sin\alpha - fM_1 g\cos\alpha\delta S_1 - \delta_{ê} M_3 g\frac{\delta S_1}{4r} - M_1 a_1\delta S_1 -$$
$$-\frac{1}{2}M_2 r_2^2\frac{a_1}{r_2}\frac{\delta S_1}{r_2} - M_3\frac{3}{4}a_1\frac{3}{4}\delta S_1 - M_3 16r^2\frac{a_1}{4r}\frac{\delta S_1}{4r} = 0. \quad (3.45)$$

Згрупуємо доданки:

$$\left\{g\left[M_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{\delta_\kappa M_3}{4r}\right] -\right.$$
$$\left. - a_1\left(M_1 + \frac{1}{2}M_2 + \frac{9}{16}M_3 + M_3\right)\right\}\delta S_1 = 0. \quad (3.46)$$

Так як $\delta S_1 \neq 0$, то повинне виконуватися співвідношення

$$g\left[M_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{\delta_\kappa M_3}{4r}\right] - a_1\left(M_1 + \frac{1}{2}M_2 + \frac{25}{16}M_3\right) = 0. \quad (3.47)$$

З рівняння (3.47) визначимо шукане прискорення вантажу:

$$a_1 = \frac{g\left[M_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{\delta_\kappa M_3}{4r}\right]}{M_1 + \frac{1}{2}M_2 + \frac{25}{16}M_3} =$$

$$= \frac{g\left[4m(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{20m\delta_\kappa}{4r}\right]}{4m + 0{,}75m + 31{,}25m} =$$

$$= \frac{mg\left[4(\sin\alpha - f\cos\alpha) - 5\frac{\delta_\kappa}{r}\right]}{36m} =$$

$$= \frac{10\cdot\left[4\cdot(0{,}87 - 0{,}2\cdot 0{,}5) - 5\frac{0{,}4}{2}\right]}{36} = \frac{20{,}8}{36} = 0{,}58 \ (\text{м/с}^2).$$

ВІДПОВІДЬ: Прискорення вантажу 1 дорівнює $a_1 = 0{,}58$ м/с^2.

3.4.3. Дослідження руху механічної системи з використанням рівняння Лагранжа другого роду

Методику розв’язання задач розглянемо на наступному прикладі.

ПРИКЛАД 3.3. Умова задачі та задана схема механічної системи співпадають з прикладом 3.1. Шукана величина – швидкість вантажу 1 через час τ =5с після початку руху.

Розв’язання

Для визначення швидкості $\overline{V}_1$ вантажу 1 через час τ =5с після початку руху складемо диференціальне рівняння руху механічної системи у вигляді рівняння Лагранжа другого роду (3.17).

Методика розв’язання задачі наступна.

1). Розглянемо механічну систему, що складається з вантажу 1, блоку 2 і котушки 3, зв'язаних ідеальною нерозтяжною ниткою (рис.3.11). Механічна система відноситься до системи з одним ступенем волі. Тому виберемо в якості узагальненої координати системи – переміщення вантажу 1 униз по похилій площині:

$$q = S_1 .$$

Визначимо узагальнену швидкість вантажу 1:

$$\dot{q} = V_1 = \dot{S}_1 .$$

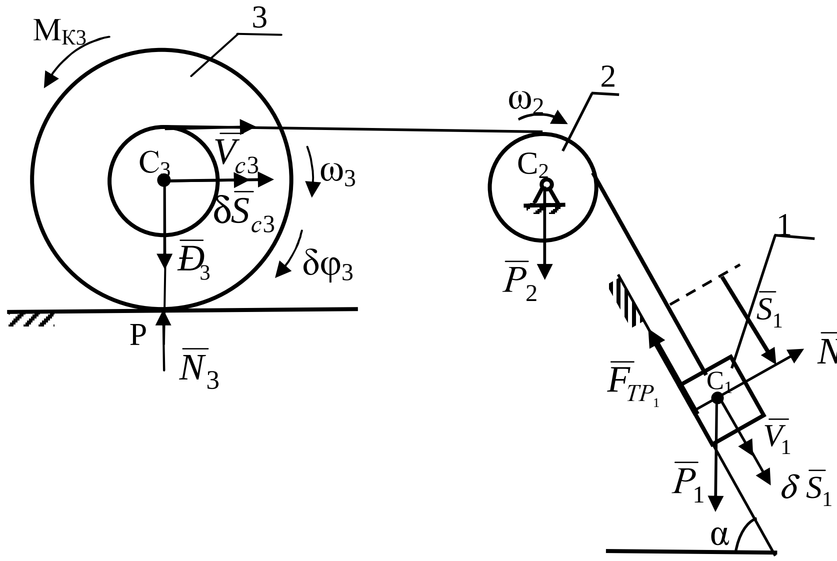


Рис. 3.11

2). Зобразимо механічну систему в довільному положенні (рис. 3.11), вважаючи, що вантаж 1 рухається убік зростання переміщення S_1.

3). Покажемо активні сили, прикладені до системи: $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ - сили ваги тіл 1, 2, 3 тіл; $\overline{N}_1, \overline{N}_3$ - нормальні реакції опорних площин тіл. Силу тертя вантажу 1 $\overline{F}_{TP_1}$ і пару сил опору коченню котушки 3 площиною $M_{к_3}$ включимо теж до активних сил. Реакції ідеальних в'язей на схемі не показуємо.

4). Визначимо і покажемо на схемі узагальнені можливі переміщення тіл системи. Для цього надамо системі можливе переміщення, при якому узагальнене переміщення вантажу 1 буде $\delta\overline{S}_1$. Спрямуємо його у бік позитивного відліку, тобто донизу. Величини і напрямки узагальнених можливих переміщень $\delta\overline{S}_{C_3}$, $\delta\varphi_3$ котушки 3 визначимо з урахуванням п.5 розд. 3.4.1.

5). Покажемо далі на схемі узагальнені лінійні і кутові швидкості вантажу 1 ($\overline{V}_1$), блоку 2 (ω_2) і котушки 3 ($\overline{V}_{C_3}$, ω_3). Їх величини і напрямки визначимо враховуючи п.2 розд. 3.4.1.

6). Обчислимо кінетичну енергію механічної системи в довільному положенні. При цьому усі лінійні і кутові швидкості, що входять у вирази для кінетичних енергій тіл системи, виразимо через узагальнену швидкість $\dot{q} = V_1$.

Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що входять у систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{3.48}$$

Вираження для T_1, T_2, T_3 визначаються за формулами (3.23), (3.26), (3.30) і (3.31). Остаточно, згідно (3.31), одержимо:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 18mV_1^2 = 18m\dot{S}_1^2\ . \tag{3.49}$$

7). Визначимо узагальнену силу Q. Для цього надамо механічній системі можливе переміщення, при якому узагальнене переміщення вантажу 1 буде $\delta q = \delta S_1$.

Обчислимо далі суму робіт активних сил на можливих переміщеннях точок їх прикладання (3.18):

$$\sum \delta A_{\hat{e}}^{a} = \delta\grave{A}_{Ð_1} + \delta\grave{A}_{N_1} + \delta A_{TÐ_1} + \delta\grave{A}_{Ð_2} + \delta\grave{A}_{Ð_3} + \delta\grave{A}_{N_3} + \delta A_{M_{\hat{E}3}}. \tag{3.50}$$

Для механічної системи, що розглядається, можливі роботи сили ваги $\overline{P}_2$ і реакції $\overline{N}_3$ дорівнюють $\delta A_{P_2} = 0$, $\delta A_{N3} = 0$ тому що точки C_2 і P (миттєвий центр швидкостей котушки) їх прикладання нерухомі. Можливі роботи $\overline{N}_1$ і сили ваги $\overline{P}_3$ дорівнюють $\delta A_{N1} = 0$, $\delta A_{P_3} = 0$, враховуючи, що можливі переміщення $\delta\overline{S}_1$, $\delta\overline{S}_{C_3}$ їх точок прикладання: $\delta\overline{S}_1 \perp \overline{N}_1$ і $\delta\overline{S}_{C_3} \perp \overline{P}_3$.

Тому одержимо

$$\sum \delta A_к^a = P_1 \delta S_1 \, sin\,\alpha - F_{Тр1} \delta S_1 - M_{К_3} \delta \varphi_3 . \qquad (3.51)$$

Після перетворень, з урахуванням співвідношень (3.50), (3.51) матимемо

$$\begin{aligned} &\sum \delta A_k^a = M_1 g \delta S_1 \sin\alpha - f M_1 g \cos\alpha \delta S_1 - \delta M_3 g \frac{\delta S_1}{4r} = \\ &\left\{ g \left[M_1 (\sin\alpha - f \cos\alpha) - \frac{\delta M_3}{4r} \right] \right\} \delta S_1 = 0. \end{aligned} \qquad (3.52)$$

Відповідно до (3.18), узагальнена сила Q дорівнюватиме коефіцієнту при δS_1 у вирази (3.52):

$$\begin{aligned} Q &= g \left[M_1 (sin\,\alpha - f\,cos\,\alpha) - \frac{\delta_к M_3}{4r} \right] = \\ &= mg \left[4 (sin\,\alpha - f\,cos\,\alpha) - 5 \frac{\delta_к}{r} \right] = \end{aligned} \qquad (3.53)$$

$$= m \cdot 10 \cdot \left[4 \cdot (0{,}87 - 0{,}2 \cdot 0{,}5) - 5 \cdot \frac{0{,}4}{2} \right] = 20{,}8m .$$

8). Складемо рівняння Лагранжа другого ряду (3.17), що для обраної узагальненої координати S_1:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial S_1} = Q .$$

Часткова похідна кінетичної енергії по узагальненій координаті S_1 дорівнює

$$\frac{\partial T}{\partial S_1} = 0 , \qquad (3.54)$$

тому що узагальнена координата S_1 у виразі (3.49) для кінетичної енергії явно не входить.

Часткова похідна кінетичної енергії (3.49) по узагальненій швидкості $\dot{S}_1$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} = 18m \cdot 2 \cdot \dot{S}_1 = 36m\dot{S}_1 . \qquad (3.55)$$

Повна похідна кінетичної енергії за часом від виразу (3.55) дорівнює:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1}\right) = 36m\ddot{S}_1. \qquad (3.56)$$

Підставимо (3.56), (3.54) і (3.53) у рівняння Лагранжа другого роду (3.17):

$$36m\ddot{S}_1 - 0 = 20{,}8m, \qquad (3.57)$$

відкіля отримаємо

$$\ddot{S}_1 = \frac{20{,}8m}{36m} \approx 0{,}58. \qquad (3.58)$$

Проінтегруємо далі один раз за часом вираз (3.58):

$$\dot{S}_1 = 0{,}58t + C_1, \qquad (3.59)$$

де C_1 - постійна інтегрування, яку визначимо з початкової умови.

Так як механічна система в початковий момент знаходиться в спокої, то

$$V_1\big|_{t=0} = \dot{S}_1\big|_{t=0} = 0. \qquad (3.60)$$

Підставляючи (3.60) у (3.59), одержимо:

$$0 = 0{,}58 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0. \qquad (3.61)$$

Тоді вираз для швидкості вантажу 1 (3.59) буде мати вигляд

$$V_1 = \dot{S}_1 = 0{,}58t. \qquad (3.62)$$

Остаточно швидкість вантажу через час $\tau = 5$ с після початку руху:

$$V_1 = 0{,}58 \cdot 5 = 2{,}9 \text{ (м/с)}.$$

ВІДПОВІДЬ: Швидкість V_1 вантажу 1 через час $\tau = 5$ с після початку його руху дорівнює $V_1 = 2{,}9$ м/с.

Завдання до теми 3:

У завданні прийняті наступні значення:

m_k - маса *k-го* тіла механічної системи;
R_k, r_k - радіуси великих і малих кіл *k-го* тіла;
i_{kz} - радіуси інерції *k-го* тіла щодо осі, що проходить через центр мас цього тіла перпендикулярно до площини креслення;
f - коефіцієнт тертя ковзання вантажу об шорстку поверхню;
$\delta_к$ - коефіцієнт тертя кочення тіла, що котиться по поверхні без ковзання;
M_0 - постійний момент опору руху.

Маси вантажів і деяких радіусів виражені у відносних одиницях, тобто через параметри m і r відповідно, які в результаті розв'язання задачі повинні скоротитися й у відповідь не ввійдуть.

Опір руху враховується завданням або коефіцієнта тертя ковзання *f*, або коефіцієнта тертя кочення $\delta_к$, або моменту опору M_0. Якщо в умовах задачі задане значення одного з параметрів, які враховують опір, то варто вважати, що іншими параметрами опору можна зневажити (наприклад, якщо заданий $f = 0{,}1$, то варто вважати, що $M_0 = 0$, $\delta_к = 0$).

Якщо маса якого-небудь тіла дорівнює нулю, то воно служить тільки для передачі руху від попереднього тіла до наступного і його сили інерції не враховуються.

Блоки і котки, радіуси інерції яких не задані, вважати суцільними однорідними циліндрами.

Нитки вважити ідеальними і нерозтяжними.

Механічна система починає рухатися зі стану спокою під дією сил ваги.

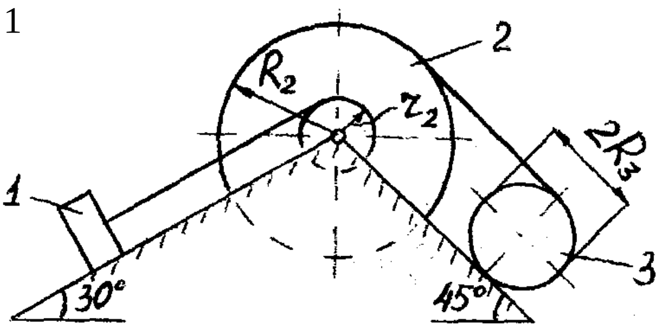
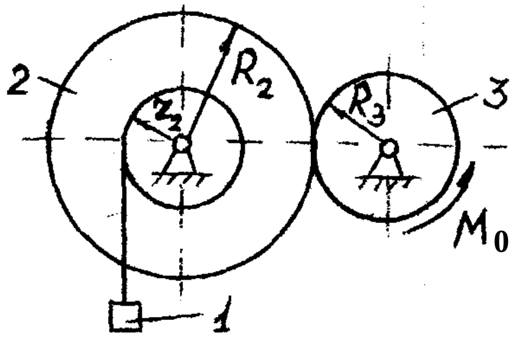
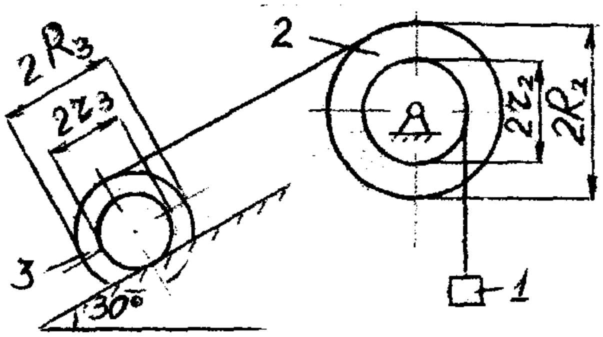
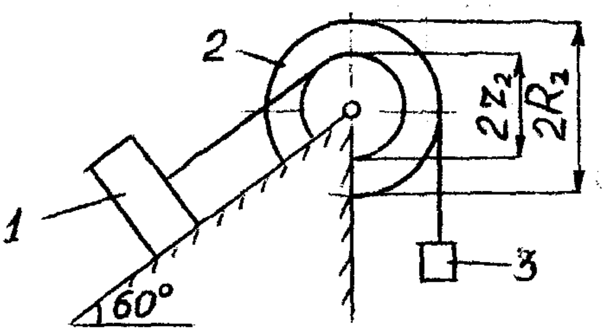
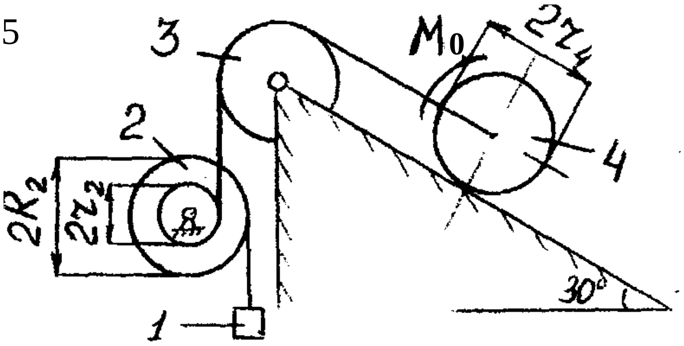
ВИЗНАЧИТИ:

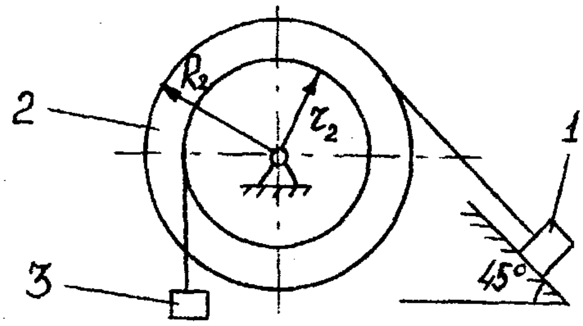
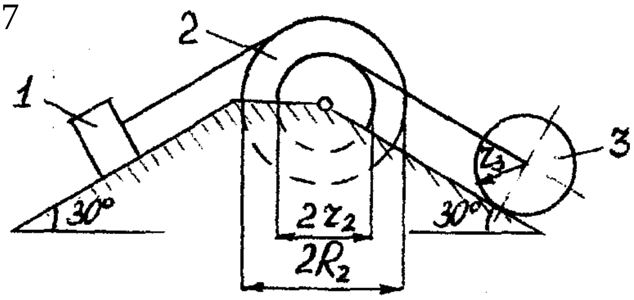
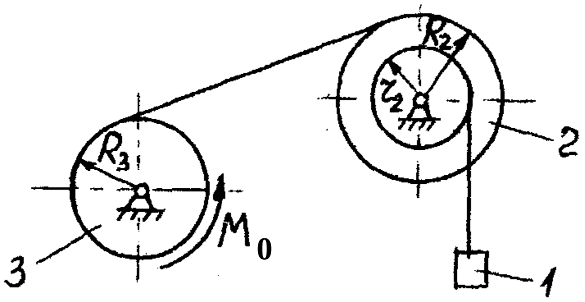
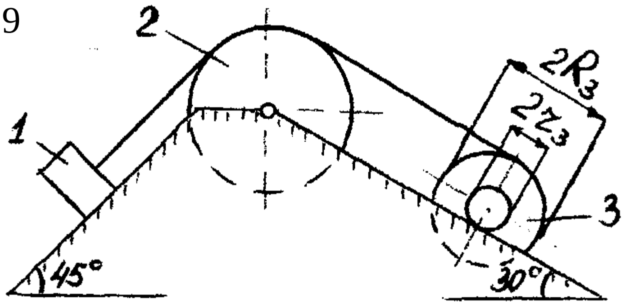
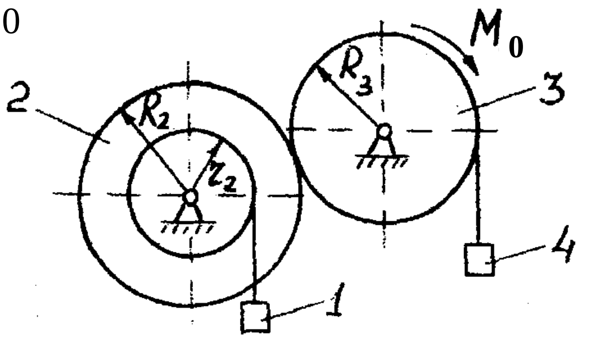
3.1. - швидкість $\overline{V_1}$ вантажу 1 у той момент, коли пройдений їм шлях дорівнює S_1;

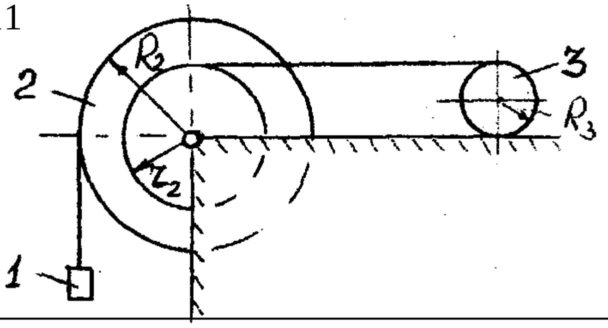
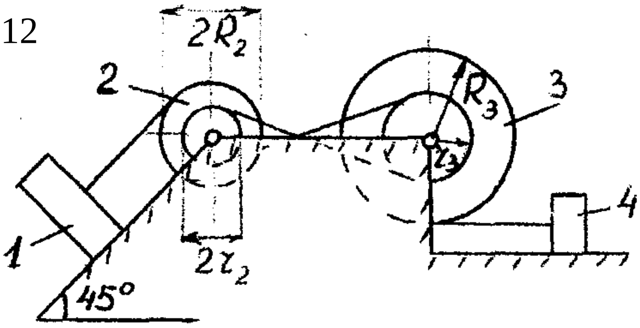
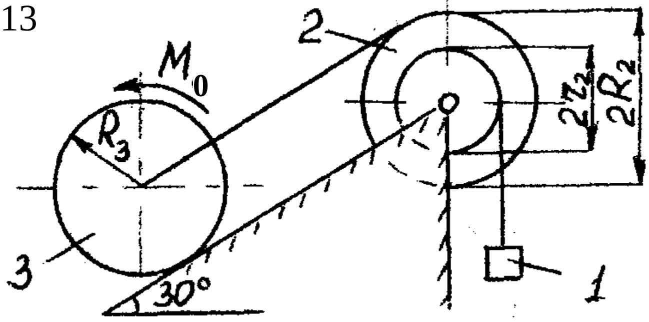
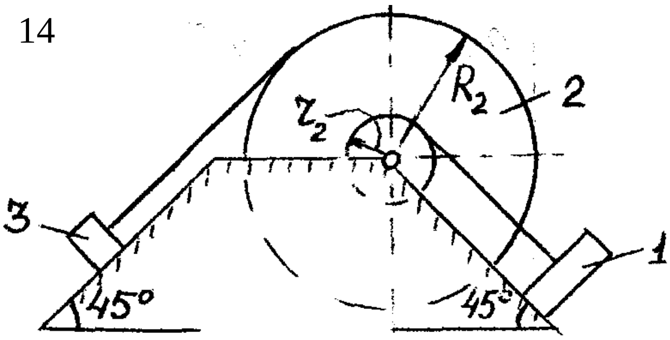
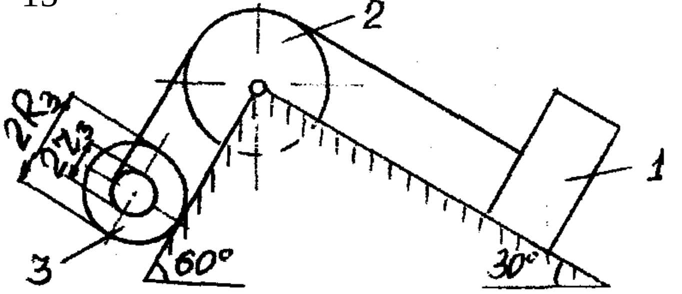
3.2. - прискорення $\overline{a}_1$ вантажу 1;

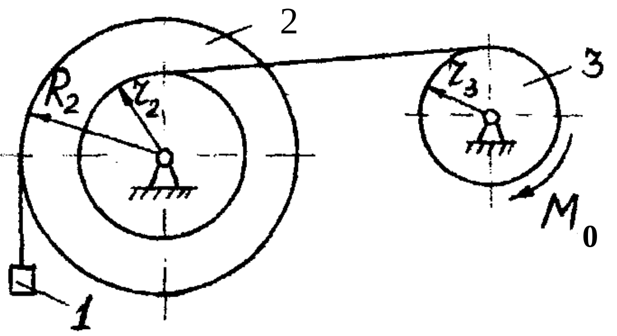
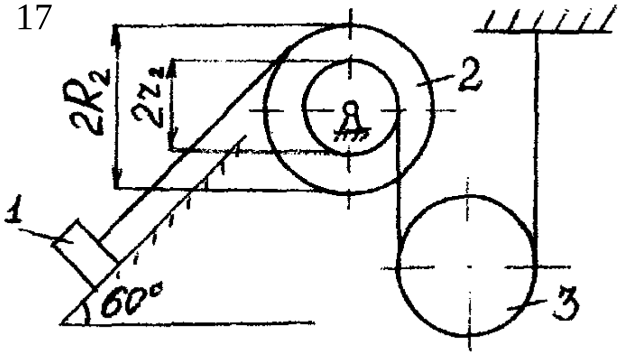
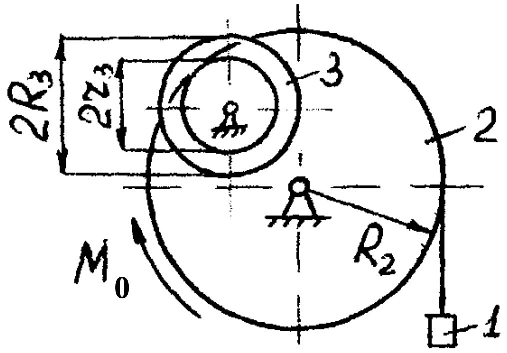
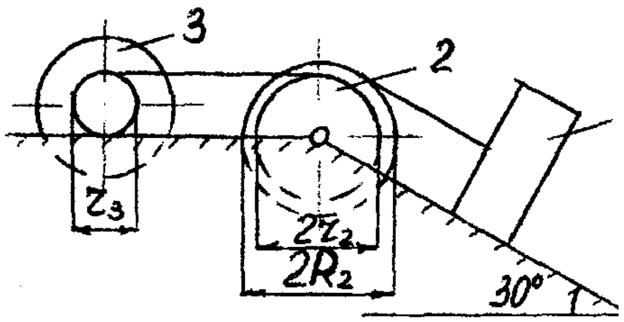
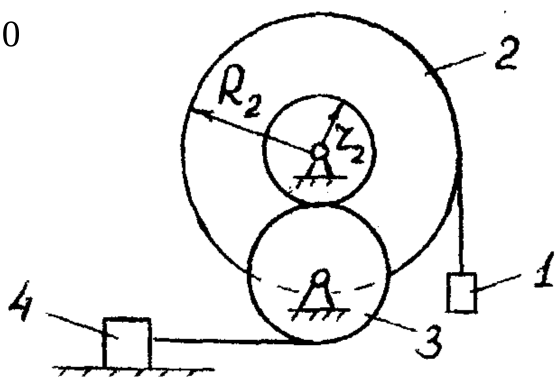
3.3. - швидкість вантажу 1 через час τ після початку руху.

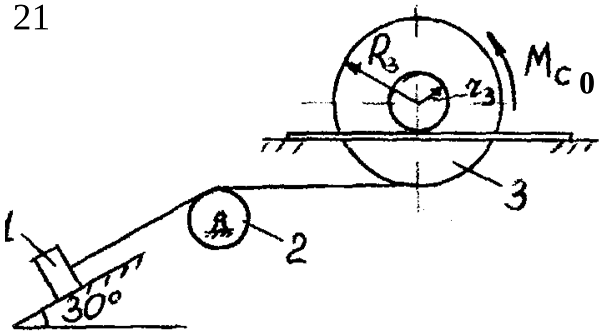
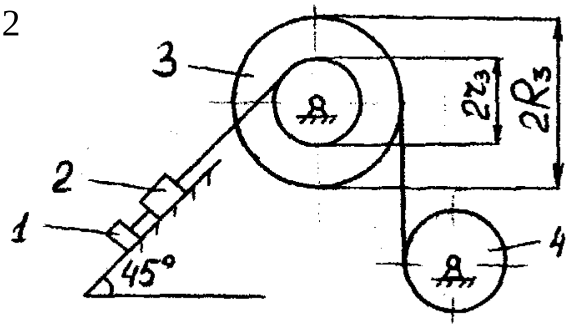
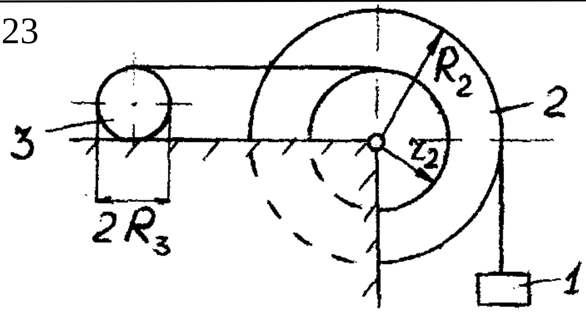
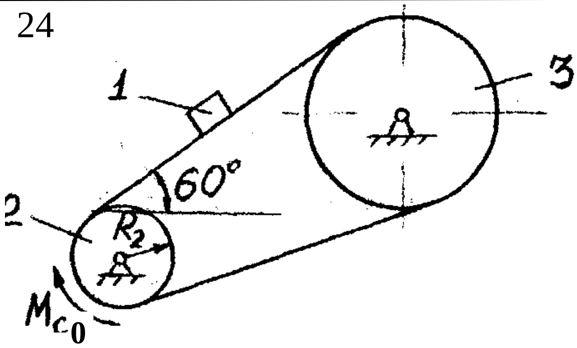
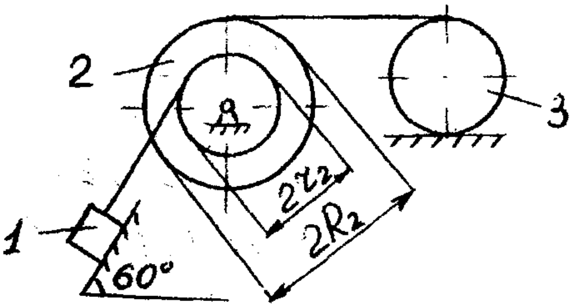
Варіанти задач до теми 3:

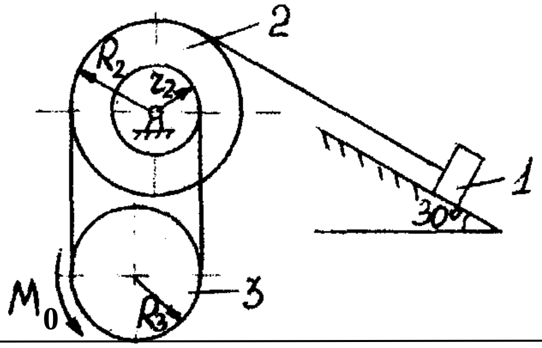
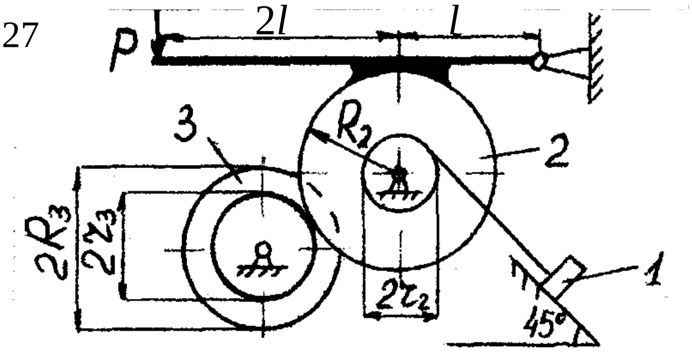
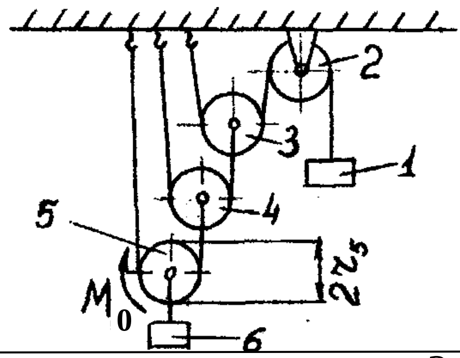
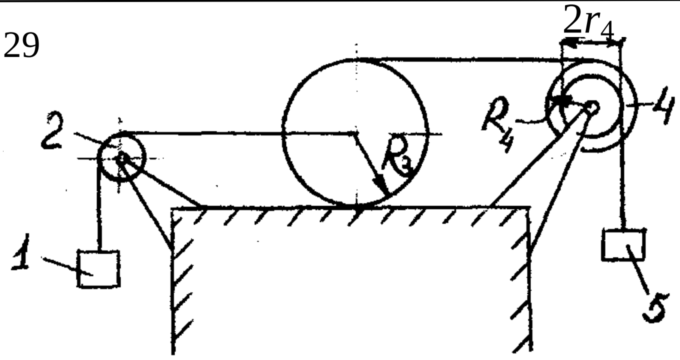
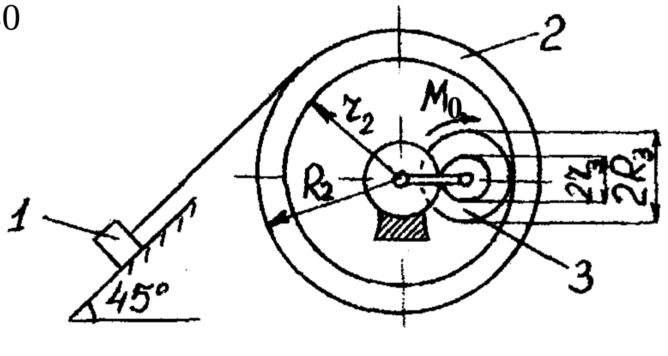
1 	$m_1 = 4m$; $m_2 = 0$; $m_3 = m$; $R_2 = 3r_2$; $R_3 = 20$ см; $f = 0{,}1$; $S_1 = 1$ м; $\tau = 5$ с.
2 	$m_1 = m$; $m_2 = 4m$; $m_3 = 2m$; $i_{2z} = \frac{3}{2}r$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $R_3 = 10$ см; $M_0 = 0{,}5 m_3 g$ Н·см; $S_1 = 2$ м; $\tau = 3$ с.
3 	$m_1 = 4m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 2m$; $i_{2z} = 3r$; $r_2 = r$; $R_2 = 4r$; $i_{3z} = \frac{3}{4}r$; $r_3 = 0{,}5r$; $R_3 = r$; $\delta_к = \frac{1}{4}r$; $S_1 = 3{,}5$ м; $\tau = 14$ с.
4 	$m_1 = 5m$; $m_2 = 0{,}5m$; $m_3 = m$; $i_{2z} = \sqrt{2}r$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $f = 0{,}1$; $S_1 = 1$ м; $\tau = 2$ с.
5 	$m_1 = 4m$; $m_2 = m_3 = 0$; $m_4 = 2m$; $R_2 = 3r_2$; $r_4 = 3$ см; $M_0 = 0{,}5 m_4 g$ Н·см; $S_1 = 13$ м; $\tau = 2{,}6$ с.

6 	$m_1 = 2m$; $m_2 = 4m$; $m_3 = 2m$; $i_{2z} = 1{,}5r$; $r_2 = r$; $R_2 = 3r$; $f = 0{,}2$; $S_1 = 0{,}5$ м; $\tau = 10$ с.
7 	$m_1 = 3m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 3m$; $r_2 = r$; $R_2 = 1{,}5r$; $\delta_к = \dfrac{1}{17}r$; $r_3 = r$; $S_1 = 2{,}5$ м; $\tau = 5$ с.
8 	$m_1 = 2m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 5m$; $i_{2z} = 0{,}6r$; $r_2 = 0{,}4r$; $R_2 = r$; $R_3 = 5$ см; $M_0 = 0{,}5 m_3 g$ Н·см; $S_1 = 1{,}4$ м; $\tau = 7$ с.
9 	$m_1 = 10m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 5m$; $i_{3z} = \sqrt{2}r$; $r_3 = r$; $R_3 = 4r$; $f = 0{,}5$; $S_1 = 6$ м; $\tau = 1$ с.
10 	$m_1 = 2m$; $m_2 = 0$; $m_3 = m_4 = 0{,}5m$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $R_3 = 4$ см; $M_0 = 0{,}4 m_3 g$ Н·см; $S_1 = 2{,}5$ м; $\tau = 5$ с.

11 	$m_1 = 3m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 2m$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $R_3 = 0{,}5r$; $\delta_к = 0{,}25r$; $S_1 = 3$ м; $\tau = 3$ с.
12 	$m_1 = 10m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 2m = m_4$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $R_3 = 3r_3$; $i_{3z} = 2r$; $f = 0{,}1$; $S_1 = 1{,}1$ м; $\tau = 11$ с.
13 	$m_1 = 2m$; $m_2 = 0$; $m_3 = \frac{3}{4}m$; $R_2 = \frac{4}{3}r$; $R_3 = 4$ см; $M_0 = 0{,}4m_3g$ Н·см; $S_1 = 7$ м; $\tau = 4$ с.
14 	$m_1 = 5m$; $m_2 = 2m$; $m_3 = m$; $i_{2z} = 2r$; $r_2 = r$; $R_2 = 3r$; $f = 0{,}1$; $S_1 = 11$ м; $\tau = 4$ с.
15 	$m_1 = 2m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 0{,}5m$; $i_{3z} = 2r$; $r_3 = r$; $R_3 = 3r$; $\delta_к = 0{,}5r$; $S_1 = 1{,}1$ м; $\tau = 4$ с.

16 	$m_1 = 2m$; $m_2 = 3m$; $m_3 = 4m$; $i_{2z} = 2r$; $r_2 = r$; $R_2 = 3r$; $r_3 = 4$ см; $M_0 = 0{,}6m_3g$ Н·см; $S_1 = 2$ м; $\tau = 2{,}3$ с.
17 	$m_1 = 4m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 3m$; $r_2 = 2r$; $R_3 = 3r$; $f = 0{,}7$; $S_1 = 0{,}1$ м; $\tau = 3$ с.
18 	$m_1 = 0{,}5m$; $m_2 = m$; $m_3 = 2m$; $R_2 = 10$ см; $i_{3z} = 1{,}5r$; $r_3 = r$; $R_3 = 2r$; $M_0 = 0{,}5m_3g$ Н·см; $S_1 = 10$ м; $\tau = 5$ с.
19 	$m_1 = 4m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 2m$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $i_{3z} = 1{,}5r$; $r_3 = 0{,}5r$; $R_3 = 2r$; $\delta_к = 0{,}1r$; $S_1 = 3{,}5$ м; $\tau = 7$ с.
20 	$m_1 = 6m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 9m$; $m_4 = 3m$; $R_2 = \frac{3}{2} r_2$; $f = 0{,}5$; $S_1 = 7$ м; $\tau = 14$ с.

21 	$m_1 = 10m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 4m$; $R_3 = \frac{3}{2}r$; $r_3 = 0{,}5r$; $i_{3z} = r$; $r = 2$ см; $M_0 = 0{,}5m_3g$ Н·см; $S_1 = 3$ м; $\tau = 3$ с.
22 	$m_1 = 2m$; $m_2 = 4m = m_3$; $m_4 = 0{,}5m$; $R_2 = 2r$; $r_3 = r$; $i_{3z} = \frac{3}{2}r$; $f = 0{,}5$; $S_1 = 2$ м; $\tau = 8$ с.
23 	$m_1 = 12m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 4m$; $R_2 = 2r$; $r_2 = r$; $R_3 = \frac{1}{2}r$; $\delta_к = \frac{3}{4}r$; $S_1 = 1{,}1$ м; $\tau = 9$ с.
24 	$m_1 = 2m$; $m_2 = m$; $m_3 = 2m$; $R_2 = 1$ см; $M_0 = 0{,}7m_2g$ Н·см; $S_1 = 0{,}7$ м; $\tau = 3{,}5$ с.
25 	$m_1 = 2m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 2m$; $R_2 = 2r$; $r_2 = r$; $f = 0{,}4$; $S_1 = 4$ м; $\tau = 8$ с.

26		$m_1 = m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 3m$; $R_2 = 3r_2$; $R_3 = 10$ см; $M_0 = 0{,}5m_2g$ Н·см; $S_1 = 5$ м; $\tau = 10$ с.
27		$m_1 = 6m$; $m_2 = m$; $m_3 = 8/9m$; $R_2 = 3r$; $r_2 = r$; $i_{2z} = 2r$; $R_3 = 2r$; $r_3 = r$; $i_{3z} = \frac{3}{2}r$; $P = \frac{1}{3}m_2g$ Н; $f = 0{,}25$; $S_1 = 3{,}5$ м; $\tau = 7$ с.
28		$m_1 = 4m$; $m_2 = m_3 = m_4 = 0$; $m_5 = 12m$; $m_6 = 14m$; $r_5 = 1$ см; $M_0 = 0{,}5m_2g$ Н·см; $S_1 = 4{,}5$ м; $\tau = 9$ с.
29		$m_1 = 4m$; $m_2 = m_4 = 0$; $m_3 = 2m$; $m_5 = m$; $R_3 = r$; $R_4 = 0{,}5r$; $r_4 = \frac{1}{4}r$; $\delta_к = \frac{1}{2}r$; $S_1 = 10$ м; $\tau = 8$ с.
30		$m_1 = 10m$; $m_2 = 0$; $m_3 = 9m$; $R_2 = \frac{3}{2}r_2$; $R_3 = 3r$; $r_3 = r$; $i_{3z} = 2r$; $r = 1{,}2$ см; $M_0 = 0{,}4m_2g$ Н·см; $S_1 = 5$ м; $\tau = 9$ с.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. II. - М.: Наука, 1985. - 558 с.

2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Ч. II. - М.: Наука, 1985. - 580 с.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2001. - 415 с.

4. Павловський М.А. Теоретична механіка.-К.: Техніка, 2002.- 510с.

5. Методичні вказівки для самостійної роботи з розділу «Динаміка» курсу теоретичної механіки / Шпачук В.П., Золотов М.С., Рубаненко О.І., Гарбуз А.О., Скляров В.О. - Харків: ХГАГХ, 2003. – 74 с.

6. Шпачук В.П., Золотов М.С., Рубаненко О.І., Гарбуз А.О. Теоретична механіка (навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей). - Харків: ХНАМГ, 2007. - 134 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки для практичних занять, виконання контрольних робіт і самостійної роботи з розділу "ДИНАМІКА" курсу теоретичної механіки (для студентів спеціальностей 6.092100 – „Промислове і цивільне будівництво", 6.092103 – „Міське будівництво та господарство", 6.092108 – „Теплогазопостачання та вентиляція", 6.092600 –„Водопостачання та водовідведення", 6.092201 – „Електричні системи і комплекси транспортних засобів", 6.092202 – „Електричний транспорт", 6.092203 – „Електромеханічні системи автоматизації та електропривод")

Укладачі: Шпачук Володимир Петрович,
Золотов Михайло Сергійович,
Рубаненко Олександр Ігоревич,
Гарбуз Алла Олегівна,

Редактор: М.З.Аляб'єв

План 2008, поз. 166М

Підп. до друку	Формат 60х84 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі.	Обл.. – вид. арк. 3,0	Зам. №
Тираж 250 прим.		

61002, м. Харків, вул. Революції, 12.

Сектор оперативної поліграфії при ІОЦ ХНАМГ
61002, м. Харків, вул. Революції, 12.